数理解析研究所講究録 1285 巻 2002 年 240-245

非圧縮流体の解析力学とITSの保存量

岡山理科大・福祉　あらき けいすけ (ARAKI Keisuke)
Dept. Assistive & Rehabilitation Eng., Okayama Univ. Sci.

非圧縮流体の解析力学に基づいた、線要素の移流の「遷移行列表示」を提案する。これは微分同相写像のなす Lie 群の Lie 環の随伴表現 ad を Lie 環の基底ベクトル (本研究では複素ヘリカル波) に関する成分として表したものである。行列表示の簡単な解析により ITS(非粘性打ち切り系) にはエネルギー、ヘリシティ以外に、運動学的な性質を持つ保存量があることが分かった。

1　はじめに

非発散流体力学の Riemann 幾何学的解析をはじめるにあたって、Arnold は次のように述べている。

> **有限次元 Lie 群上の測地線の性質**を、無限次元の場合に形式的に引き移すとどんな結論が得られるか、を考えることは興味あることである。(文献 [1], p.314, 太字は著者)

われわれはこの動機を共有し、さらに次のように問うてみることにしよう。

> **有限次元 Lie 群論にあらわれる不変式 (たとえば Killing 形式)** を、無限次元の場合に形式的に引き移すとどんな結論が得られるか。

測地線上に限定されない不変量を見ることになるので、われわれの得る結果は必然的に運動学的な性質になる。本研究では**線要素の生成するベクトル場の移流**について考察する。というのも線要素ベクトル場の移流は有限次元の Lie 群論における**群の随伴表現**に他ならないからである。具体的には、発展方程式

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\vec{x},t)=\left[\boldsymbol{u}(\vec{x},t)\,,\,\boldsymbol{X}(\vec{x},t)\right] \tag{1}$$

に従う 3 次元非発散ベクトル場 $\boldsymbol{X}(\vec{x},t)$ の性質について調べることである、ただしここで $\boldsymbol{u}$ はある与えられた速度場の時系列 $\{\boldsymbol{u}(t);0\le t\le 1\}$, 上付きドット $\dot{*}$, 括弧 $[*\,,*]$ はそれぞれ

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\vec{x},t)=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(\vec{x},t),\qquad \left(\left[\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{X}\right]\right)_k=\sum_j\left(X_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-u_j\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) \tag{2}$$

とする。3 次元の非発散ベクトル場の場合には

$$\left[\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{X}\right]=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{X}) \tag{3}$$

とかけるので、括弧 $[*\,,*]$ (以下、交換子と呼ぶ) は 3 次元非発散ベクトル場の関数空間 (以下、$\mathfrak{X}_S$ と表記する) 内部で閉じた演算である。以下の計算において、交換子 $[*\,,*]$ の持つ次の二つの性質のみを用いる;

$$\text{歪対称性}\ :\ \left[\boldsymbol{A}\,,\boldsymbol{B}\right]=-\left[\boldsymbol{B}\,,\boldsymbol{A}\right], \tag{4}$$

$$\text{Jacobi 恒等式}\ :\ \left[\boldsymbol{A}\,,\left[\boldsymbol{B}\,,\boldsymbol{C}\right]\right]+\left[\boldsymbol{B}\,,\left[\boldsymbol{C}\,,\boldsymbol{A}\right]\right]+\left[\boldsymbol{C}\,,\left[\boldsymbol{A}\,,\boldsymbol{B}\right]\right]=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

2　3次元非圧縮流体による運動の行列表現

無限次元ベクトル空間 $\mathfrak{X}_S(\mathbb{T}^3)$ の正規直交基底として複素ヘリカル波 (complex helical wave)

$$\boldsymbol{\phi}_{\vec{k}\sigma}(\vec{x})\ =\ \frac{\boldsymbol{e}_\vartheta(\vec{k})+\mathrm{i}\sigma\boldsymbol{e}_\varphi(\vec{k})}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{L}\vec{k}\cdot\vec{x}\right) \tag{6}$$

を採り、以下 CHW 基底と呼ぶことにする。$\boldsymbol{X}$ の交換子 $[\boldsymbol{X}\,,*]$ は $\mathfrak{X}_S(\mathbb{T}^3)$ からそれ自身への線形作用素、すなわち $\mathrm{End}(\mathfrak{X}_S(\mathbb{T}^3))$ の元である。その CHW 基底に対する『遷移行列 (の成分)』を次の式で定義しよう:

$$\left\langle \vec{p},\sigma_p\,\middle|\,\boldsymbol{X}\,\middle|\,\vec{k},\sigma_k\right\rangle:=\frac{1}{L^3}\int_{\mathbb{T}^3}\overline{\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p}}\cdot\left[\boldsymbol{X}\,,\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p}\right]\mathrm{d}\vec{x}. \tag{7}$$

このとき $\boldsymbol{X}$ の基底ベクトル $\phi_{\vec{k}\sigma_k}$ への作用は遷移行列を用いて次のように表現することができる:

$$[\boldsymbol{X}, \phi_{\vec{k}\sigma_k}] = \sum_{\vec{p},\sigma_p} \langle \vec{p},\sigma_p \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle \, \phi_{\vec{p}\sigma_p}. \tag{8}$$

この行列表示は、数学的に言えば Lie 環の随伴表現 $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{X}}$ の CHW 基底に関する行列の成分になっている。この遷移行列は物理的にはベクトル場 $\boldsymbol{X}$ による線要素ベクトル場の無限小時間の移流を表している。とくに基底関数 $\phi_{\vec{p}\sigma_p}$ の行列表現は

$$[\phi_{\vec{p}\sigma_p}, \phi_{\vec{q}\sigma_q}] = \sum_{\vec{k},\sigma_k} \langle \vec{k}\sigma_k \,|\, \phi_{\vec{p}\sigma_p} \,|\, \vec{q}\sigma_q \rangle \, \phi_{\vec{k}\sigma_k} \tag{9}$$

を満たすので、Lie 群の CHW 基底に関する構造定数 (structure constant) を与えている。

この表示を利用すると交換子の 2 回連続の作用は行列の積のように書き下すことができる:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{p}\sigma_p}} \cdot [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \phi_{\vec{k}\sigma_k}]]\, \mathrm{d}\vec{x} &= \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{p}\sigma_p}} \cdot \Big[\boldsymbol{X}, \sum_{\vec{q},\sigma_q} \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{Y} \,|\, \vec{k}\sigma_k \rangle \phi_{\vec{q}\sigma_q}\Big]\, \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{q},\sigma_q}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{p}\sigma_p}} \cdot [\boldsymbol{X}, \phi_{\vec{q}\sigma_q}]\, \mathrm{d}\vec{x}\, \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{Y} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle \\
&= \sum_{\vec{q},\sigma_q} \langle \vec{p},\sigma_p \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{q},\sigma_q \rangle \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{Y} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle.
\end{aligned} \tag{10}$$

交換子 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{X}]$ の遷移行列表示を計算すると、面白いことに行列の交換子と形式的に一致する[1];

$$\begin{aligned}
\Big\langle \vec{p},\sigma_p \Big| [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{X}] \Big| \vec{k},\sigma_k \Big\rangle &= \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{p}\sigma_p}} \cdot [[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{X}], \phi_{\vec{k}\sigma_k}]\, \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{p}\sigma_p}} \cdot \Big([\boldsymbol{u}, [\boldsymbol{X}, \phi_{\vec{k}\sigma_k}]] - [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{u}, \phi_{\vec{k}\sigma_k}]]\Big)\, \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \sum_{\vec{q},\sigma_q} \langle \vec{p},\sigma_p \,|\, \boldsymbol{u} \,|\, \vec{q},\sigma_q \rangle \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle - \sum_{\vec{q},\sigma_q} \langle \vec{p},\sigma_p \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{q},\sigma_q \rangle \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{u} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle.
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで定義した遷移行列 $\langle \vec{p},\sigma_p \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle$ は Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{X}}$ の CHW 基底に関する成分である。随伴表現は群 G の内部自己同型の微分で定義され、交換子の定義 Eq.(2) に一致することをみるのはたやすい[2];

$$\mathrm{ad}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t} e^{s\boldsymbol{X}} e^{t\boldsymbol{Y}} e^{-s\boldsymbol{X}} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \quad \text{where} \quad e^{s\boldsymbol{X}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!}\Big(\sum_{j=1}^{3} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big). \tag{12}$$

3 夢を見る、あるいは保存則の計算

関係式 $f(x) = f(gxg^{-1})$, $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ を満たす式 f を G 上の不変式と呼ぶ。不変式は群の位相不変量を計算するための基本的な道具として、Lie 群論において重要な役割を果たしている [2]。ここでは不変式として Killing 形式 $B(X,Y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$ を取り上げ、流体力学へのアナロジーを考えよう。Killing 形式を流体力学へ形式的に引き移すと次の量になる:

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) &:= \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{k},\sigma_k}\int_{\mathrm{T}^3} \overline{\phi_{\vec{k}\sigma_k}} \cdot [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \phi_{\vec{k}\sigma_k}]]\, \mathrm{d}\vec{x}, \\
&= \sum_{\vec{k},\sigma_k}\sum_{\vec{q},\sigma_q} \langle \vec{k},\sigma_k \,|\, \boldsymbol{X} \,|\, \vec{q},\sigma_q \rangle \langle \vec{q},\sigma_q \,|\, \boldsymbol{Y} \,|\, \vec{k},\sigma_k \rangle.
\end{aligned} \tag{13}$$

[1] われわれの交換子の定義 Eq.(3) が conventional な Poisson 括弧と符号が逆であるにも関わらず、Jacobi 恒等式から導かれる結果であることに注意。公式: $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X$.

[2] この式の両辺はパッシブスカラーに対する微分作用素である。指数写像は、パッシブスカラーを定ベクトル $\boldsymbol{X}$ によって流すこと、すなわち $(\partial_t + X_j(\vec{x})\partial_j)f(\vec{x},t) = 0$ の解 $f(t)$ を $f(t) = e^{t\vec{X}} f(0)$ と表すことによって定義されている。

この保存量を3次元非圧縮流体の言葉に形式的に引き移すと次の量になる;

$$B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) := \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{k},\sigma_k}\int_{\mathrm{T}^3}\phi_{\vec{k}\sigma_k}\cdot\nabla\times\left(\boldsymbol{X}\times\nabla\times(\boldsymbol{Y}\times\phi_{\vec{k}\sigma_k})\right)\mathrm{d}\vec{x}. \tag{14}$$

では $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ が Eq.(1) に従うとして、時間発展を計算しよう

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\mathrm{d}t}\\
=&\sum_{\vec{k},\sigma_k}\sum_{\vec{q},\sigma_q}\Big(\langle\vec{k},\sigma_k|\dot{\boldsymbol{X}}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|\vec{k},\sigma_k\rangle+\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\dot{\boldsymbol{Y}}|\vec{k},\sigma_k\rangle\Big)\\
=&\sum_{\vec{k},\sigma_k}\sum_{\vec{q},\sigma_q}\Big(\langle\vec{k},\sigma_k|[\boldsymbol{u},\boldsymbol{X}]|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|\vec{k},\sigma_k\rangle+\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|[\boldsymbol{u},\boldsymbol{Y}]|\vec{k},\sigma_k\rangle\Big)\\
=&\sum_{\vec{k},\sigma_k}\sum_{\vec{q},\sigma_q}\sum_{\vec{p},\sigma_p}\Big(\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{u}|\vec{p},\sigma_p\rangle\langle\vec{p},\sigma_p|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|\vec{k},\sigma_k\rangle\\
&\qquad-\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{p},\sigma_p\rangle\langle\vec{p},\sigma_p|\boldsymbol{u}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|\vec{k},\sigma_k\rangle\\
&\qquad+\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{u}|\vec{p},\sigma_p\rangle\langle\vec{p},\sigma_p|\boldsymbol{Y}|\vec{k},\sigma_k\rangle\\
&\qquad-\langle\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|\vec{p},\sigma_p\rangle\langle\vec{p},\sigma_p|\boldsymbol{u}|\vec{k},\sigma_k\rangle\Big).
\end{aligned}\tag{15}$$

この式で第2項と第3項、第1項と第4項が互いにキャンセルするので、全体として時間発展は0、すなわち保存量となる。この計算は形式的には高次の量へと拡張でき、n-次の保存量は次式で与えられる:

$$B_n(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_n) := \sum_{\vec{k},\sigma_k}\int_{\mathrm{T}^3}\overline{\phi_{\vec{k}\sigma_k}}\cdot[\boldsymbol{X}_1,[\boldsymbol{X}_2,[\cdots,[\boldsymbol{X}_n,\phi_{\vec{k}\sigma_k}]\cdots]]]\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{16}$$

この保存量を $\boldsymbol{X}_j$ について対称化したものは、Lie 群論に現れる n-次の不変多項式に他ならない [2]。

4 夢から覚める、あるいは保存量の計算

本節では Killing 形式の値を求めよう。$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ の遷移行列の成分の値は次のようになる:

$$\langle-\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle = -e^{\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}}\sum_{\sigma_X=\pm1}\sigma_k k\,(\sigma_k k+\sigma_X p+\sigma_q q)\frac{\pi S}{\sqrt{2}L}\frac{\sigma_k\sigma_X\sigma_q}{kpq}\times\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)\,\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}), \tag{17}$$

$$\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|-\vec{k},\sigma_k\rangle = -e^{-\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}}\sum_{\sigma_Y=\pm1}\sigma_q q\,(\sigma_k k+\sigma_Y p+\sigma_q q)\frac{\pi S}{\sqrt{2}L}\frac{\sigma_k\sigma_Y\sigma_q}{kpq}\times\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}), \tag{18}$$

ここで $\vec{p}=-\vec{k}-\vec{q}$, $k=|\vec{k}|$, $p=|\vec{p}|$, $q=|\vec{q}|$, $\widehat{*}$ はCHW基底に関する展開係数 $\widehat{X}(\vec{q},\sigma_q)=\int_{\mathrm{T}^3}\overline{\phi_{\vec{q}\sigma_q}}\cdot\boldsymbol{X}\,\mathrm{d}x$, δ は引数 $\vec{0}$ で1, それ以外で0となる関数である。計算の詳細および式中の Ψ, S の定義は付録を参照せよ。これを用いて保存量の値を求めよう

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{q},\sigma_q}\sum_{\vec{k},\sigma_k}\langle\vec{q},\sigma_q|\boldsymbol{Y}|-\vec{k},\sigma_k\rangle\langle-\vec{k},\sigma_k|\boldsymbol{X}|\vec{q},\sigma_q\rangle\\
&\qquad\text{(Eqs.(17), (18) を代入し、}\sigma_k,\sigma_q\text{ に関して和を取って)}\\
=&\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{q}}\sum_{\vec{p}}\sum_{\sigma_Y=\pm1}\sum_{\sigma_X=\pm1}\frac{4\pi^2\sigma_X\sigma_Y S^2}{L^2p^2}\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})
\end{aligned}$$

(S の値を代入し、$\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}$ に関する和を積分に、δ を Dirac のデルタ関数に置き換えて)

$$= \sum_{\sigma_Y=\pm1}\sum_{\sigma_X=\pm1} \frac{\pi^2\sigma_X\sigma_Y}{L^2} \int \mathrm{d}\vec{k}\int \mathrm{d}\vec{q}\int \mathrm{d}\vec{p}\,p^{-2}(k+p+q)(p+q-k)$$
$$\times(q+k-p)(k+p-q)\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)\delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})$$

($\vec{q}$ に関して積分して)

$$= \sum_{\sigma_Y=\pm1}\sum_{\sigma_X=\pm1} \frac{\pi^2\sigma_X\sigma_Y}{L^2} \int \mathrm{d}\vec{k}\int \mathrm{d}\vec{p}\,p^{-2}(k+p+|\vec{k}+\vec{p}|)(p+|\vec{k}+\vec{p}|-k)$$
$$\times(|\vec{k}+\vec{p}|+k-p)(k+p-|\vec{k}+\vec{p}|)\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)$$

(改めて $q=|\vec{k}+\vec{p}|$ と置き、積分変数を (k,ϑ,φ) から (k,q,φ) へと置換する)

$$= \sum_{\sigma_Y=\pm1}\sum_{\sigma_X=\pm1} \frac{\pi^2\sigma_X\sigma_Y}{L^2} \int \mathrm{d}\vec{p}\int_0^\infty \mathrm{d}k\int_{|k-p|}^{k+p} \mathrm{d}q\frac{2\pi q}{k p^3}(k+p+q)(p+q-k)$$
$$\times(q+k-p)(k+p-q)\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)$$

(q に関して積分すると)

$$= \sum_{\sigma_Y=\pm1}\sum_{\sigma_X=\pm1} \frac{\pi^2\sigma_X\sigma_Y}{L^2} \int \mathrm{d}\vec{p}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\frac{32\pi k^2}{3}\widehat{Y}(-\vec{p},\sigma_Y)\,\widehat{X}(\vec{p},\sigma_X)$$

($\vec{p}$ に関する積分を物理空間での内積に、k に関する積分を波数の数え上げに戻して)

$$= \frac{8\pi^3}{3L^2}\left(\sum_{\vec{k}}1\right)\int_{\mathrm{T}^3}\big(\boldsymbol{Y}_+(\vec{x})-\boldsymbol{Y}_-(\vec{x})\big)\cdot\big(\boldsymbol{X}_+(\vec{x})-\boldsymbol{X}_-(\vec{x})\big)\,\mathrm{d}\vec{x} \tag{19}$$

となり、(大雑把な見積もりだが) 保存量は $O(k^3)$ で紫外発散してしまう。ここで添え字 $+$, $-$ は次式で与えられるベクトル場のヘリシティ毎の分解である:

$$\boldsymbol{A}_+(\vec{x}) := \sum_{\vec{k}}\boldsymbol{\phi}_{\vec{k},+1}(\vec{x})\int_{\mathrm{T}^3}\overline{\boldsymbol{\phi}_{\vec{k},+1}(\vec{x})}\cdot\boldsymbol{A}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},\quad \boldsymbol{A}_-(\vec{x}) := \sum_{\vec{k}}\boldsymbol{\phi}_{\vec{k},-1}(\vec{x})\int_{\mathrm{T}^3}\overline{\boldsymbol{\phi}_{\vec{k},-1}(\vec{x})}\cdot\boldsymbol{A}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}. \tag{20}$$

出てきた結果を見る限り Killing 形式のアナログは、ベクトル場の導関数を含まない点でエンストロフィよりはエネルギーに似ており、ヘリシティ毎の分解を含む点でエネルギーよりはエンストロフィに似ている、という奇妙な量になっている。

5 開き直り、あるいは保存則の救出

発散の問題が回避できなかったので、系そのものに制限を加えて保存量を救い出そう。計算の本質が Lie 環の構造のみに依存するので、非発散ベクトル場の空間 $\mathfrak{X}_S$ の高波数側に cut off を入れた系、すなわち

$$\mathfrak{X}_S|_{k_c} \quad := \quad \left\{\boldsymbol{X}\,;\,\boldsymbol{X}\in\mathfrak{X}_S,\,\widehat{X}(\vec{k},\sigma)=0,\ \text{if}\ |\vec{k}|>k_c\right\} \tag{21}$$

を考えよう。$\mathfrak{X}_S|_{k_c}$ の上の Lie 環の構造を次のように定義する:

$$\left\langle\vec{k}\sigma_k\,\middle|\,\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p}\,\middle|\,\vec{q}\sigma_q\right\rangle = \begin{cases}\dfrac{1}{L^3}\displaystyle\int_{\mathrm{T}^3}\overline{\boldsymbol{\phi}_{\vec{k}\sigma_k}}\cdot\left[\,\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p},\,\boldsymbol{\phi}_{\vec{q}\sigma_q}\right]\mathrm{d}\vec{x} & \text{for}\ \max\{|\vec{k}|,|\vec{p}|,|\vec{q}|\}<k_c,\\ 0 & \text{for}\ \max\{|\vec{k}|,|\vec{p}|,|\vec{q}|\}>k_c.\end{cases} \tag{22}$$

非粘性打ち切り系 (inviscid truncated system, ITS) とは、この Lie 環が生成する Lie 群 ($G|_{k_c}$ と表記しよう) 上に右不変な Riemann 計量を定義したときに、作用積分の変分問題で与えられる力学系のことである。今のところ独立なものが何個あるかについての結論は得られてはいないが、次の定理を得る。

定理: Eq.(16) で与えられる n-体の積分量は Lie 群 $G|_{k_c}$ 上の保存量である。

6 負け惜しみ、あるいは困難の原因の追求

残念なことに保存量は紫外発散してしまう。しかしながら『この保存量が存在すると仮定すれば、物理的にはどのような量を見ることになるのか』について考えることは興味深い。

この保存量は Lie 群上の一般的な性質を見ている、すなわち測地線の上に制限されない性質なので、運動学的な保存量である。ベクトル場 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ は線要素の移流の方程式に従うので、場の強さは (渦度あるいは磁力線の) 伸張の効果により、時間とともに変化していく。したがって、保存量は場の各点での振幅の時間変化に左右されないものを表しているはずである。渦線 (あるいは磁力線) のような frozen in field の性質で、時間が経過しても変化がないものは、渦線 (あるいは磁力線) のトポロジーにのみ関わっているものに違いない。われわれはこの保存量が、もしも存在するとすれば、それは**例えばベクトル場 $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の『流線』の相互の絡み合いの数**のようなトポロジカルな量を表現しているのではないかと考える。逆に、この量が現実には発散してしまうことは、このようなベクトル場相互のトポロジカルな性質を定量的に調べるのは難しいことを示唆しているのかもしれない。

証明の途中で Lie 環の性質のみを用いているので、Lie 環の性質を持った演算で定義される『移流』があれば、その移流に対する保存則を与えることはいうまでもない。

References

[1] アーノルド著, 安藤, 蟹江, 丹羽訳, 『古典力学の数学的方法』, (岩波書店, 1980).

[2] 茂木, 伊藤, 『微分幾何学とゲージ理論』, (共立出版, 1986).

付録:CHW 基底に対する Poisson 括弧

以下のヘリカルベクトルの三重積の計算の方法は F. Waleffe, Phys. Fluids A 4, 350 (1992) に従っている。

$$\begin{aligned}
\langle -\vec{k},\sigma_k \,|\, \boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p} \,|\, \vec{q},\sigma_q \rangle &= \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \boldsymbol{\phi}_{\vec{k}\sigma_k} \cdot \left[\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p}, \boldsymbol{\phi}_{\vec{q}\sigma_q}\right] \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \left(\nabla \times \boldsymbol{\phi}_{\vec{k}\sigma_k}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\phi}_{\vec{p}\sigma_p} \times \boldsymbol{\phi}_{\vec{q}\sigma_q}\right) \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \frac{2\pi\sigma_k|\vec{k}|}{L}\left[\boldsymbol{h}(\vec{k},\sigma_k), \boldsymbol{h}(\vec{p},\sigma_p), \boldsymbol{h}(\vec{q},\sigma_q)\right] \frac{1}{L^3}\int_{\mathrm{T}^3} \exp\left[\frac{2\pi\mathrm{i}}{L}(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}\right] \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \frac{2\pi\sigma_k|\vec{k}|}{L}\left[\boldsymbol{h}(\vec{k},\sigma_k), \boldsymbol{h}(\vec{p},\sigma_p), \boldsymbol{h}(\vec{q},\sigma_q)\right] \delta(\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}) \qquad (23)
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{h}$ は波数 $\vec{k}$ 毎に定義されるヘリカル・ベクトル $\boldsymbol{h}(\vec{k},\sigma_k) := 2^{-1/2}\left(\boldsymbol{e}_\vartheta(\vec{k}) + \mathrm{i}\sigma \boldsymbol{e}_\varphi(\vec{k})\right)$, $\{\, \boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{e}_\vartheta(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{e}_\varphi(\boldsymbol{k}) \,\}$ は Fourier 空間での球座標系の基底ベクトル、$[*,*,*]$ はベクトル三重積 $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] := \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ である。以下、ヘリカルベクトルの三重積の値を計算しよう。

準備として $\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}=\vec{0}$ の組 $\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}$ に対して次の『法線ベクトル』を定義しておこう

$$\boldsymbol{e}_n\left(\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}\right) := \boldsymbol{e}_r(\vec{k}\times\vec{p}) \qquad (24)$$

定義より明らかなように三つ組 $\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}$ には順序付け

$$\rightarrow \vec{k} \rightarrow \vec{p} \rightarrow \vec{q} \rightarrow \vec{k} \rightarrow \qquad (25)$$

がある。したがって $\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}$ と $\{\vec{k},\vec{q},\vec{p}\}$ とは順序付けが逆である。このベクトルを三つ組 $\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}$ のベクトルと順序付けがはっきりしている限りにおいて、$\boldsymbol{e}_n^{\triangle}$ と略記しよう。ベクトル $\boldsymbol{e}_n^{\triangle}$ は $\vec{k}$ と直交する

$$\boldsymbol{e}_n^{\triangle}\cdot\vec{k} = 0 \qquad (26)$$

ので、『陪法線ベクトル』を

$$e_b(\vec{k}) = e_r(\vec{k}) \times e_n^{\triangle} \tag{27}$$

により定義すると、右手系をなすベクトルの三つ組

$$\{e_r(\vec{k}), e_n^{\triangle}, e_b(\vec{k})\} \tag{28}$$

を得る。ヘリカルベクトルを定義した三つ組 $\{e_r(\vec{k}), e_\vartheta(\vec{k}), e_\varphi(\vec{k})\}$, も右手系であったことを考えると、二つのベクトル対

$$(e_\vartheta(\vec{k}), e_\varphi(\vec{k})) \text{ と } (e_n^{\triangle}, e_b(\vec{k})) \text{ とは同一平面上にある。} \tag{29}$$

したがって次式を満たす実数 $\rho(\vec{k}) \in [0, 2\pi)$ が存在する

$$e_\vartheta(\vec{k}) + \mathrm{i}\sigma e_\varphi(\vec{k}) = \exp\left(\mathrm{i}\rho(\vec{k})\right)\left(e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma e_b(\vec{k})\right) \tag{30}$$

以上の議論は三つ組みの残り二つのベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ についても同様になりたつ。このことを用いて、『$e_n^{\triangle}$ 右手系』三つ組を用いてヘリカルベクトルを書き下すと

$$h(\vec{k}, \sigma_k) = e^{\mathrm{i}\rho(\vec{k})} \frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_k e_b(\vec{k})}{\sqrt{2}} \quad h(\vec{p}, \sigma_p) = e^{\mathrm{i}\rho(\vec{p})} \frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_p e_b(\vec{p})}{\sqrt{2}} \quad h(\vec{q}, \sigma_q) = e^{\mathrm{i}\rho(\vec{q})} \frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_q e_b(\vec{q})}{\sqrt{2}} \tag{31}$$

ここで $\rho(\vec{k})$, $\rho(\vec{p})$, $\rho(\vec{q})$ は区間 $[0, 2\pi)$ 内のある実数。この表式をベクトル三重積に代入して

$$\begin{aligned}
& \Big[h(\vec{k}, \sigma_k),\ h(\vec{p}, \sigma_p),\ h(\vec{q}, \sigma_q) \Big] \\
& \quad \text{(ヘリカルベクトルの値を代入し、}\Psi\{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}\} := \rho(\vec{k}) + \rho(\vec{p}) + \rho(\vec{q}) \text{ とおくと)} \\
= \ & e^{\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}} \left[\frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_k e_b(\vec{k})}{\sqrt{2}}, \frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_p e_b(\vec{p})}{\sqrt{2}}, \frac{e_n^{\triangle} + \mathrm{i}\sigma_q e_b(\vec{q})}{\sqrt{2}} \right] && (32) \\
& \quad \text{(ベクトル三重積を展開すると、恒等的に零でないものは三つあって)} \\
= \ & -\frac{e^{\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}}}{2\sqrt{2}} \Big(\sigma_p\sigma_q \big[e_n^{\triangle}, e_b(\vec{p}), e_b(\vec{q})\big] + \sigma_q\sigma_k \big[e_n^{\triangle}, e_b(\vec{q}), e_b(\vec{k})\big] + \sigma_k\sigma_p \big[e_n^{\triangle}, e_b(\vec{k}), e_b(\vec{p})\big] \Big) && (33) \\
& \quad \text{(これらベクトル三重積の値を } \vec{k}, \vec{p}, \vec{q} \text{ を用いて表すと)} \\
= \ & -\frac{e^{\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}}}{2\sqrt{2}} \left(\sigma_p\sigma_q \frac{|\vec{p} \times \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|} + \sigma_q\sigma_k \frac{|\vec{q} \times \vec{k}|}{|\vec{q}||\vec{k}|} + \sigma_k\sigma_p \frac{|\vec{k} \times \vec{p}|}{|\vec{k}||\vec{p}|} \right) && (34) \\
& \quad (S = |\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{q} \times \vec{k}| = |\vec{k} \times \vec{p}| \text{ とおき、} \sigma_k^2 = \sigma_p^2 = \sigma_q^2 = 1 \text{ を利用して整理すると)} \\
= \ & -e^{\mathrm{i}\Psi\{\vec{k},\vec{p},\vec{q}\}} \frac{S}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma_k\sigma_p\sigma_q}{|\vec{k}||\vec{p}||\vec{q}|} \left(\sigma_k|\vec{k}| + \sigma_p|\vec{p}| + \sigma_q|\vec{q}|\right) && (35)
\end{aligned}$$

を得る。S を $k := |\vec{k}|$, $p := |\vec{p}|$, $q := |\vec{q}|$ を用いて表すと

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(k+p+q)(p+q-k)(q+k-p)(k+p-q)} \tag{36}$$

以上まとめて

$$\frac{1}{L^3} \int_{\mathbb{T}^3} \phi_{\vec{k}\sigma_k} \cdot \left[\phi_{\vec{p}\sigma_p}, \phi_{\vec{q}\sigma_q} \right] \mathrm{d}\vec{x} = -e^{\mathrm{i}\Psi\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}} \sigma_k k \left(\sigma_k k + \sigma_p p + \sigma_q q\right) \frac{\pi S}{\sqrt{2}L} \frac{\sigma_k\sigma_p\sigma_q}{kpq} \delta(\vec{k} + \vec{p} + \vec{q}) \tag{37}$$

ここで位相 $\Psi\{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}\}$ は波数の「順序つき三つ組み」$\{\rightarrow \boldsymbol{k} \rightarrow \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q} \rightarrow\}$ にのみ依存し、ヘリシティの符号 σ_k, σ_p, σ_q には依らない数字であることに注意せよ。つまり三つ組みのペア $\{(\boldsymbol{k}, \sigma_k), (\boldsymbol{p}, \sigma_p), (\boldsymbol{q}, \sigma_q)\}$, $\{(-\boldsymbol{k}, \sigma_k), (-\boldsymbol{p}, \sigma_p), (-\boldsymbol{q}, \sigma_q)\}$ があったときに、これらの構造定数の積は実数であるということ。